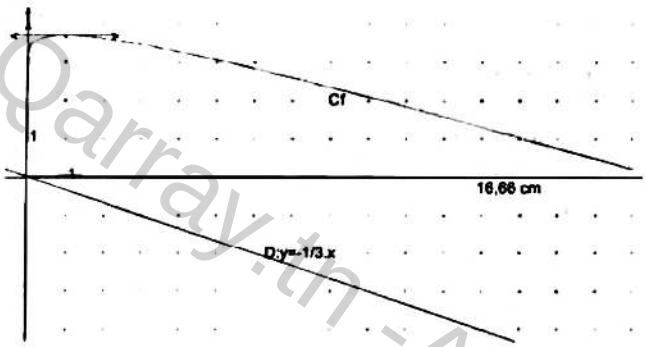
d) * f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ $f([0,1[)=[3,\frac{11}{3}[$, $0\notin[3,\frac{11}{3}[$ d'où l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solutions dans $[0,1[$

* f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[)=]-\infty,\frac{11}{3}]$

comme $0\in]-\infty,\frac{11}{3}]$, alors il existe un unique réel $\alpha\in[1,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$

conclusion : α est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}_+^*$

$f(16,6).f(16,7)<0 \Rightarrow 16,6<\alpha<16,7$ (calculatrice)



EX 24 :

A/ $n\in\mathbb{N}^*$

$f_n(x)=x^{2n+1}+3x-2$

1) a) $f_n'(x)=(2n+1).x^{2n}+3>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) * pour $x\in D_{f_n}=\mathbb{R}$ on a $(-x)\in D_{f_n}$

* $f_n(-x)=(-x)^{2n+1}+3(-x)-2=-x^{2n+1}-3x-2$

$=-4-(x^{2n+1}+3x-2)=-4-f_n(x)$

conclusion : I(0,-2) est un centre de symétrie pour (ζ_n)

c) $f_n''(x)=2n(2n+1)x^{2n-1}$

f_n'' s'annule en 0 en changeant de signe

d'où I(0,-2) est un point d'inflexion de (ζ_n)

2) a) $f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{2n+3}-x^{2n+1}=x^{2n+1}.(x^2-1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	-	0	+	0 -	0 +
Position relative	C_n/C_{n+1}	C_{n+1}/C_n	C_n/C_{n+1}		C_{n+1}/C_n
		B(-1,-6)	I(0,-2)	A(1,2)	

b) $(\zeta_n)\cap(\zeta_{n+1})=\{I(0,-2);A(1,2);B(-1,-6)\}$

3) a) f_n *est* continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$f_n(\mathbb{R})=\left]\lim_{-\infty}f_n,\lim_{+\infty}f_n\right[=\mathbb{R}$

b) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+3\neq 0$ d'où f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(f_n^{-1})'(-6)=\frac{1}{f_n'(f^{-1}(-6))}=\frac{1}{f_n'(-1)}=\frac{1}{2(n+2)}$$

$$(f_n^{-1})'(2)=\frac{1}{f_n'(1)}=\frac{1}{2(n+2)}$$

$$(f_n^{-1})'(-2)=\frac{1}{f_n'(0)}=\frac{1}{3}$$

4) f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

comme $0\in f_n(\mathbb{R})$ alors il existe un réel x_n tq $f_n(x_n)=0$

$f_n(0)\times f_n(\frac{2}{3})=(-2)(\frac{2}{3})^{2n+1}<0$

$\Rightarrow 0<x_n<\frac{2}{3}$

b) $f_n(x_n)=0 \Leftrightarrow x_n^{2n+1}+3x_n-2=0$

$\Leftrightarrow 3x_n=2-x_n^{2n+1} \Leftrightarrow x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}$

c) $0\le x_n\le\frac{2}{3} \Rightarrow 0\le x_n^{2n+1}\le(\frac{2}{3})^{2n+1}$

d) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^{2n+1}=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}x_n^{2n+1}=0$

$x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}$

$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}=\frac{2}{3}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn